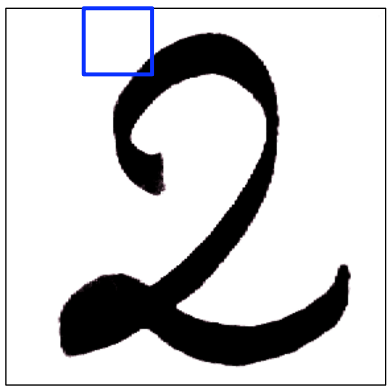
Exercice 1 – Classification d'images binaires (exam 2009)

Soit une base d'images binaires (pixels noirs ou blancs) de taille 256x256 pixels. Un exemple d'image est fourni Fig. 1. Nous avons tenté au cours du semestre une analyse bayesienne pixel par pixel à l'aide d'une loi de Bernoulli. Malheureusement, les chiffres n'étaient pas tous positionnés de la même manière et cela à causer une perte de performances. Pour palier ce phénomène, nous proposons de recommencer l'expérience en utilisant une fenêtre glissante sur l'image. Une telle fenêtre est dessinée sur l'exemple.



Q 1.1 Modélisation.
La fenêtre peut prendre N positions dans l'image. Nous indicerons la position en i, x_i désigne la fenêtre dans la position i avec i variant de 1 à N. Pour une image donnée, la variable x_i prend la valeur k_i. k_i est le nombre de pixels noirs dans la fenêtre. x_i suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p_i)$. La fenêtre choisie est de taille 2x2 soit 4 pixels. Afin de représenter une image $\boldsymbol{x}$, nous utiliserons l'ensemble des fenêtres : $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$.

1. Quelles valeurs peuvent prendre les x_i ?
2. Que modélisent les paramètres de la loi binomiale ? Que vaut n ?

Rappelons que pour la loi binomiale : $p(x_i = k_i) = C_n^{k_i} p_i^{k_i} (1 - p_i)^{n-k_i}$

Q 1.2 Pour caractériser une classe d'image, il faut trouver un ensemble de paramètres : $\{p_i\}_{i=1,\dots,N}$. D'une manière générale, décrire les étapes permettant de trouver les paramètres p_i.

Q 1.3 Soit $p(\boldsymbol{x})$ la probabilité d'observer une image étant donnée un ensemble de $\{p_i\}$, à quelle condition pouvons nous écrire $p(\boldsymbol{x}) = \Pi_{i=1}^{N} p(x_i = k_i)$?
NB : les k_i représentent les observations effectuées sur l'image $\boldsymbol{x}$.

Q 1.4 Donner la log-vraisemblance d'un ensemble d'images de la même classe en fonction des p_i, k_i^j, n. Vous utiliserez un exposant j pour différentier les images de la base ($\boldsymbol{x}^j = \{k_i^j\}_{i=1,\dots,N}$).

Q 1.5 Montrer que les valeurs suivantes de p_i maximisent la vraisemblance :

$$p_i = \frac{K_i}{nN}, \quad K_i = \sum_j k_i^j$$

Exercice 2 – Multiclasse

Nous passons maintenant sur un formalisme multiclasse où les classes sont notées C. Lorsque deux classes apparaissent dans la même formule, nous distinguerons C et C'.

Q 2.1 Donner l'expression de $p(C|\boldsymbol{x})$ à l'aide du théorème de bayes.

Q 2.2 Le rapport des probabilités *a posteriori* permet de construire une fonction discriminante entre deux classes. Expliquer l'affectation dans les deux classes en fonction de la valeur du rapport. Que devient l'affectation si nous utilisons le log du rapport ?

Q 2.3 Exprimer le log-rapport en fonction des *a priori*, des p_i, des p'_i et des $K_i = \sum_j k_i^j$.