LI323 – TD 3

PROBABILITÉS DISCRÈTES

Mise en jambe

On lance trois fois de suite un dé.

- Quel est l'espace de probabilité lié à cette expérience ?
- On s'intéresse au nombre de valeurs distinctes obtenues. Définir la variable aléatoire correspondante et donner sa loi.

Loi binomiale

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié (incluse) de ses moteurs tombe en panne.

1. Soient $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $Y \in \{0, 1, 2\}$ les v.a. correspondant respectivement au nombre de moteurs en panne des avions A et B. Quelles sont les lois de X et Y ?
2. Donnez les probabilités que chaque avion arrive à destination.
3. Pour quelles valeurs de p faut-il choisir de voyager avec l'avion B ?

Dates d'anniversaire

Dans cet exercice, on suppose que la date d'anniversaire d'une personne (jour et mois) est distribuée uniformément sur l'ensemble des dates possibles, en ignorant les années bisextiles. Ainsi, une personne tirée aléatoirement a une probabilité $\frac{1}{365}$ d'être née un jour particulier de l'année.
n personnes se retrouvent à une soirée ($n \geq 2$).

- À partir de quelle valeur de n est-on sûr qu'il y a deux personnes nées le même jour ?
- Soit n, un entier compris entre 2 et 365. Quelle est la probabilité que les n personnes soient toutes nées des jours différents ?
- Donnez une formule de récurrence simple permettant de calculer p_n à partir de p_{n-1}.
- À partir de quelle valeur de n a-t'on une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ que au moins deux personnes soient nées le même jour ?

Loi binomiale - 2

Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, n fois chacun. On note X, Y le nombre de “pi1e” obtenus respectivement par A, B.

- Pour tout k dans $[[0, n]]$, calculer la probabilité de l'événement : $(X = k)$, $(Y = k)$, et $(X = k)$ et $(Y = k)$.
- En déduire la probabilité que A et B obtiennent le même nombre de fois "pile'.

De passage...

Deux personnes A et B partent en vacances de façon indépendante dans un pays E. Leur séjour dans ce pays peut s'étaler sur n journées (n $>$ 3) numérotées de 1 à n. Pour éventuellement s'y rencontrer, elles ont projeté d'y séjourner trois jours consécutifs (et trois jours seulement) dans un hôtel H, choisi par elles. On suppose que les jours d'arrivée possibles sont uniformes et indépendantes. Les arrivées ont lieu le matin et les départs le soir deux jours plus tard.

- Quelle est la probabilité que A et B arrivent le même jour ?
- Quelle est la probabilité qu'elles arrivent avec un jour d'écart ?
- Quelle est la probabilité qu'elles puissent se rencontrer dans l'hôtel ?
- Sachant que A et B se sont rencontrées, quelle est la probabilité qu'elles ne puissent passer qu'une journée ensemble ?

Exemples d'algorithmes stochastiques

L'algorithme RandomSort

On suppose que l'on a accès à une fonction `RandomPerm`(n), qui renvoie une permutation de l'ensemble $\{1, ..., n\}$, prise selon la distribution uniforme.

- Quelle est la probabilité que `RandomPerm`(n) tire une permutation particulière ?
- Soit $[x_0, ..., x_n]$ un tableau contenant n valeurs distinctes. On considère l'algorithme de tri suivant :

`RandomSort` :

1. $tri \leftarrow$ `faux`
2. $i \leftarrow 1$
3. tant que `non`(tri) et $i \leq k$ faire :
4. $\quad p \leftarrow$ `RandomPerm`(n)
5. $\quad$ si $\forall j \in \{0, ..., n-1\}, x_{p(j)} \leq x_{p(j+1)}$:
6. $\quad\quad tri \leftarrow$ `vrai`
7. $\quad$ fin si
8. $\quad i \leftarrow i + 1$
9. fin tant que
10. retourner $[x_{p(0)}, ..., x_{p(n)}]$

- En fonction de la valeur de k, quelle est la probabilité que `RandomSort` renvoie le tableau trié ?
- Pour quelle valeur de k a-t-on une probabilité supérieure à 0.5 que la fonction renvoie le tableau trié ? Cet algorithme est-il efficace en pratique ?

Mélanger un tableau (fonction `RandomPerm`)

On suppose que l'on a accès à un générateur de nombres aléatoires `rand`(k), qui renvoie un entier entre 0 et k. Considérons l'algorithme suivant:

1. $tab = [0, 1, ..., n]$
2. pour k allant de n à 1 faire:
3. $\quad p \leftarrow$ `rand`(k)
4. $\quad$ échanger les valeurs de $tab[k]$ et $tab[p]$
5. fin pour
6. retourner tab

On note X la variable aléatoire qui correspond au tableau tab en sortie de l'algorithme. Montrez que:

- pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, $P(X[n] = i) = \frac{1}{n+1}$;
- pour tout $(i, j) \in \{0, ..., n\}^2$, si $i \neq j$ alors $P\big(X[n-1] = j \mid X[n] = i\big) = \frac{1}{n}$;
- Soit $(i_0, ..., i_n) \in \{0, ..., n\}^{n+1}$ un $(n+1)$-uplet contenant $n+1$ valeurs distinctes. Que vaut $P(X = [i_0, ..., i_n])$?