LI323 — CHAINES DE MARKOV A TEMPS DISCRET (CMTD)

Définitions

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ processus stochastique → à espace d'état discret E
→ à temps discret (étapes)
→ sans mémoire : $P[X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_0] = P[X_n \mid X_{n-1}]$

On s'intéresse ici uniquement aux **CMTD à espace d'état fini** (E possède N états) :

$$E = \{1, 2, \ldots, N\}$$

On s'intéresse ici uniquement aux **CMTD *homogènes*** :

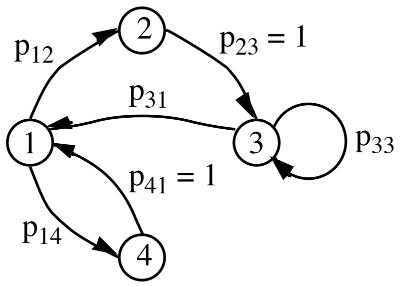
Probabilité de transition d'un état i vers un état j entre 2 étapes consécutives (n–1 et n) :

$$p_{ij} = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

telles que $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \qquad \forall\, i \in E$

Matrice de transition $P = [p_{ij}]_{i,\, j \in E}$

Exemple



$E = \{1, 2, 3, 4\}$
$p_{23} = p_{41} = 1$
$p_{12} + p_{14} = 1$
$p_{31} + p_{33} = 1$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & 0 & p_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Régime transitoire (au bout d'un nombre fini d'étapes)

Consiste à déterminer le vecteur $\vec{\pi}^{(n)}$ des probabilités d'état $\pi_j^{(n)} = P[X_n = j]$, $j \in E$, pour que le processus $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se trouve dans l'état j à la $n^{\text{ième}}$ étape du processus :

$$\vec{\pi}^{(n)} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots, \pi_N^{(n)}]$$

Ce vecteur dépend → de la matrice des transitions P
→ de l'état initial $\vec{\pi}^{(0)}$

Equation du régime transitoire : $\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(n-1)} P$

dont on déduit : $\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(0)} P^n$

Nature des états d'une CMTD

Un état d'une CMTD est dit

→ *transitoire*, si lorsqu'on le quitte, on n'est pas sûr d'y revenir

→ *récurrent*, si lorsqu'on le quitte, on est sûr d'y revenir

- *récurrent non nul*, si on y revient en un nombre moyen d'étapes fini
- *récurrent nul*, si on y revient en un nombre moyen d'étapes infini

Une CMTD est dite *irréductible*, si de tout état i on peut atteindre tout état j (en un nombre fini d'étapes).

Tous les états d'une CMTD irréductible sont de même nature :

→ tous transitoires

→ tous récurrents nuls

→ tous récurrents non nuls

Les états d'une CMTD irréductible et finie sont

→ tous récurrents non nuls

Un état est dit *périodique* de période k (k > 1), si on ne peut y revenir (après l'avoir quitté) qu'en un nombre d'étapes multiples de k.

La *période* d'une CMTD est définie comme le PGCD de la période de tous ses états.

La période d'une CMTD est égale au PGCD de la longueur de tous les circuits (élémentaires) du graphe associé.

Une CMTD est dite *apériodique* si sa période est égale à 1.

Régime permanent (au bout d'un nombre infini d'étapes)

S'intéresse à la limite lorsque n tend vers l'infini du vecteur des probabilités $\vec{\pi}^{(n)}$.

Cette limite existe-t-elle ? Et si oui, comment la calculer ?

Dans une CMTD finie, irréductible et apériodique, le vecteur $\vec{\pi} = [\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N]$ des probabilités limites $\pi_j = \lim_{n \to \infty} \pi_j^{(n)}$ existe toujours, est indépendant de la distribution des probabilités initiales $\vec{\pi}^{(0)}$, et est solution du système :

$$\begin{cases} \vec{\pi} = \vec{\pi}P \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} & \text{pour tout } j \in E \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

LI323	CHAINES DE MARKOV A TEMPS DISCRET TD

Exercice 1 :

D'éminents sociologues rangent les individus de notre société dans trois classes sociales : (B)ourgeoisie, (C)lasse moyenne et (P)rolétariat. On s'intéressera, dans ce modèle simpliste, à la classe sociale qu'atteint un individu à la fin de sa vie. On supposera que celle-ci dépend uniquement de la classe sociale de son père (et pas de celles de ses ancêtres).

Si le père appartient à la classe sociale (B) son fils appartiendra aux classes (B), (C) avec des probabilités respectives 0.5 et 0.5.

Si le père appartient à la classe sociale (C) son fils appartiendra aux classes (B), (C) et (P) avec des probabilités respectives 0.2, 0.7 et 0.1.

Si le père appartient à la classe sociale (P) son fils appartiendra aux classes (B), (C) et (P) avec des probabilités respectives 0.1, 0.3 et 0.6.

1 - Montrer que ce comportement sociologique peut être modélisé par une chaîne de Markov à temps discret (CMTD). Donner le graphe associé, ainsi que la matrice des transitions.

2 - Cette chaîne est-elle irréductible ? Apériodique ? Quelle est la nature des différents états de la CMTD ?

3 - Déterminer les probabilités stationnaires des trois classes sociales. Quelles sont, à (très) long terme, les proportions de gens de chacune des trois classes ?

4 - Quelle est la probabilité stationnaire d'être d'une classe sociale différente de celle de son grand-père (paternel) ?

Exercice 2 : **Commutateur**

On considère un nœud de commutation et on s'intéresse à la file de sortie des paquets vers une destination donnée. Celle-ci est constituée d'un « buffer » stockant les paquets en attente d'émission vers la destination considérée et d'un « serveur » transmettant un paquet bit par bit sur la liaison de sortie. La capacité totale de la file (buffer + serveur) est limitée à K paquets. Un paquet se présentant à l'entrée de la file alors que celle-ci est pleine, est rejeté.

On s'intéresse à l'état de la file à des instants particuliers $t_k = k.T$, $k = 0, 1, 2, ...$, où T est un intervalle de temps constant (*time slot*). On s'intéresse au processus stochastique $\{X_k\}_{k = 0, 1, 2, ...}$, où X_k est le nombre de clients dans la file à l'instant t_k.

On suppose que les arrivées de paquets et les fins de service sont distribués selon une loi de Bernoulli. Durant chaque time slot de durée T, il y a donc une probabilité p pour qu'il arrive un paquet (et 1–p pour n'en arrive aucun), et, conditionné par le fait que la file contient au moins un paquet au début du time slot, une probabilité q pour que la transmission du paquet en service se termine, libérant alors une place dans le buffer à la fin du time slot (et 1–q pour qu'elle ne se termine pas).

1 - Donner l'expression des probabilités suivantes :

$P[X_k = n+1 \mid X_{k-1} = n] =$ pour $n = 1, \dots, K-1$

$P[X_k = n-1 \mid X_{k-1} = n] =$ pour $n = 1, \dots, K-1$

$P[X_k = n \mid X_{k-1} = n] =$ pour $n = 1, \dots, K-1$

$P[X_k = 1 \mid X_{k-1} = 0] =$

$P[X_k = 0 \mid X_{k-1} = 0] =$

$P[X_k = K-1 \mid X_{k-1} = K] =$

$P[X_k = K \mid X_{k-1} = K] =$

2 - Montrer que $\{X_k\}_{k = 0, 1, 2,,...}$ est une chaîne de Markov à temps discret (CMTD). Donner le graphe associé.

3 - Sous quelle condition cette chaîne admet-elle un régime stationnaire ? Quelle est la nature des différents états de la chaîne ?

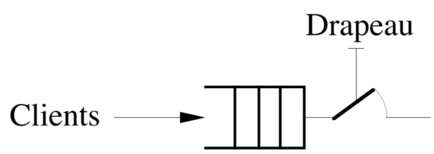
Par la suite, on prendra les valeurs numériques suivantes : $K = 3$, $p = \frac{1}{3}$ et $q = \frac{1}{2}$.

4 - Calculer les probabilités stationnaires de la file.

5 - En déduire le nombre moyen de paquets dans le commutateur (à la fin d'un time slot).

Exercice 3 : **Drapeau**

On considère un mécanisme de type « drapeau ». Lorsque le drapeau est baissé (ou passant) tout client qui se présente passe immédiatement et sans délai. Lorsque le drapeau est levé (ou bloquant), les clients sont bloqués et doivent attendre dans un buffer. Dès que le drapeau redevient passant, tous les clients présents dans le buffer sont immédiatement et simultanément libérés.



On discrétise l'état du drapeau en découpant le temps en Intervalles de Temps (IT) de durée T. On suppose que l'état du drapeau ne peut changer qu'au début d'un IT et reste inchangé pendant toute la durée de l'intervalle. Durant chaque IT le drapeau a alors une probabilité r d'être passant (et donc 1–r d'être bloquant).

On suppose dans un premier temps que les arrivées de clients dans le système sont Bernoulliennes : durant chaque IT, il y a une probabilité p pour qu'il arrive un client et 1–p pour qu'il n'en arrive aucun.

On souhaite modéliser ce système par une chaîne de Markov à temps discret (CMTD). Soit $n^{(k)}$ le nombre de clients restant dans le buffer à la fin du $k^{\text{ième}}$ IT. Initialement le système est vide et le drapeau est bloquant.

1 - Pourquoi le processus stochastique $\{n^{(k)}\}_{k \geq 1}$ est-il une CMTD ?

2 - Représenter cette CMTD.

3 - Cette chaîne est-elle irréductible ? Apériodique ?

Par la suite, on supposera que tous les états de la chaîne sont récurrents non nuls quels que soient les valeurs de $p > 0$ et $r > 0$, et on choisira $p = \frac{2}{5}$ et $r = \frac{1}{6}$.

4 - Donner les équations du régime permanent et les résoudre.

5 - Quelle est la probabilité stationnaire pour que le buffer contienne plus de 5 clients à la fin d'un IT ?

6 - Quel est le nombre moyen de clients en attente à la fin de chaque IT ?

On suppose maintenant que les arrivées sont poissoniennes de taux λ.

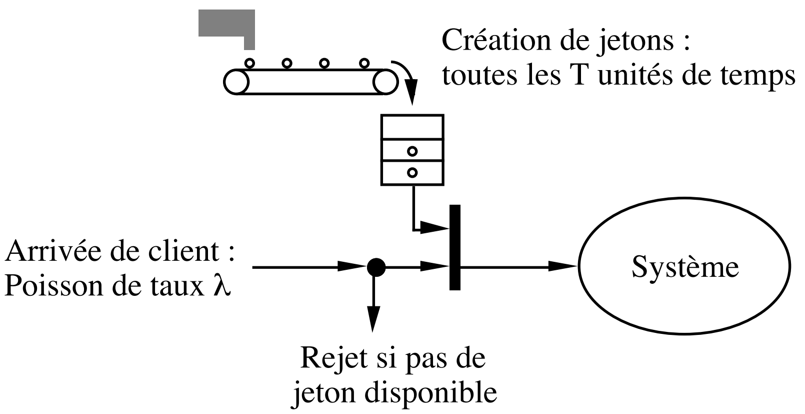
7 - Donner l'expression des probabilités

8 - Représenter la CMTD modélisant ce système.

Exercice 4 : **Leaky bucket**

On considère un système dans lequel les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ. Pour limiter l'accès dans le système, on instaure à l'entrée du système un mécanisme de jetons (droits d'entrées). Pour pouvoir entrer dans le système un client doit obtenir un jeton. Au moment où un client arrive à l'entrée du système deux choses peuvent donc se produire : 1) il trouve un jeton disponible, prend le jeton et entre dans le système, 2) il ne trouve pas de jeton et est alors rejeté.

Les jetons sont stockés à l'entrée du système dans une file (buffer) de capacité limitée à 3 et sont générés de la façon suivante : Toutes les T unités de temps (exactement) un nouveau jeton est créé. A cet instant précis, 1) soit la file de jetons n'est pas pleine et le nouveau jeton y est stocké, 2) soit la file de jetons est pleine et le nouveau jeton est détruit.



Soit α_n la probabilité qu'il arrive n clients pendant un slot de temps de longueur T.

Soit β_n la probabilité qu'il arrive au moins n clients (donc n ou plus) pendant un slot de temps de longueur T.

1 - Sachant que le processus stochastique décrivant les arrivées de clients est un processus de Poisson de taux λ, que valent les probabilités : $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ et $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$?

On va s'intéresser au système à des instants particuliers t_n dans le temps correspondant aux moments où les nouveaux jetons sont générés : $t_n = n\,T$. Un slot de temps est défini comme un intervalle $[t_n, t_{n+1}[$. Au début d'un slot de temps il peut donc y avoir entre 1 et 3 jetons dans la file de jetons. A cet instant la file ne peut en effet pas être vide, puisqu'un jeton vient tout juste d'être généré.

Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le nombre de jetons dans la file des jetons à l'instant t_n.

2 - Si à l'instant t_n il y a 1 jeton disponible combien peut-il y avoir de jetons à l'instant t_{n+1} ? Avec quelles probabilités ?

Si à l'instant t_n il y a 2 jetons disponibles combien peut-il y avoir de jetons à l'instant t_{n+1} ? Avec quelles probabilités ?

Si à l'instant t_n il y a 3 jetons disponibles combien peut-il y avoir de jetons à l'instant t_{n+1} ? Avec quelles probabilités ?

3 - En déduire que le processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à temps discret. Donner le graphe et la matrice de transitions associés.

4 - Cette chaîne est- elle irréductible ? périodique ? Admet-elle un état stationnaire ? Justifier vos réponses.

5 - Calculer les probabilités stationnaires π_k pour que le processus $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit dans l'état k.

6 - Les probabilités π_k peuvent-elles être considérées comme les proportions de temps pendant lequel la file de jetons contient k jetons en régime stationnaire ? Justifier votre réponse.

7 - Quel est le nombre moyen de jetons détruits par unité de temps ?

8 - En déduire le débit moyen d'entrée λ_e des clients dans le système ainsi que la probabilité P_r de rejet d'un client.

LI323	CHAINES DE MARKOV A TEMPS DISCRET TME

Résolution exacte

Trouver la solution stationnaire d'une CMTD consiste à résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \vec{\pi} = \vec{\pi}P \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} \quad \text{pour tout } j \in E \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

où P est la matrice de transitions et E est l'espace d'état (ensemble de tous les états de la CMTD).

La résolution directe de ce système n'est souvent réalisable que pour des chaînes particulières ayant une structure très simple. Dans la majorité des cas, il faudra utiliser des techniques numériques, qui consistent à résoudre le système de façon itérative en utilisant une approche de type « point fixe ».

Méthode des puissances

La méthode des puissances est la plus simple des méthodes numériques. Elle consiste à résoudre de façon itérative l'équation :

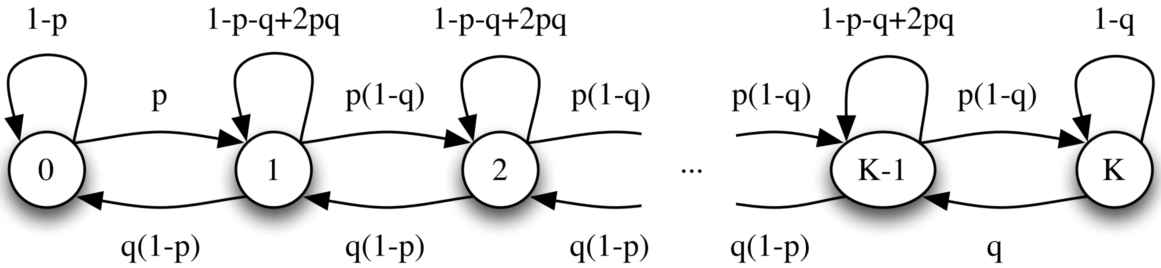
$$\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(n-1)}P \quad \Leftrightarrow \quad \pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(n-1)} p_{ij} \quad \text{pour tout } j \in E$$

en partant d'une initialisation de $\vec{\pi}^{(0)}$ (par exemple $\vec{\pi}^{(0)} = \frac{1}{|E|}$ pour tout i $\in$ E) et en s'arrêtant lorsque qu'un certain critère de convergence est satisfait.

Remarque : Si le vecteur initial $\vec{\pi}^{(0)}$ est bien normalisé, les $\vec{\pi}^{(n)}$ resteront normalisés au cours des différentes itérations.

Exercice 1 : **Processus de naissance et de mort**

On considère la CMTD suivante (correspondant au modèle de l'exercice 2 des TDs) :



où $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$.

1 - Programmer la résolution exacte de la chaîne (pour des valeurs de K, p et q quelconques) de la façon la plus efficace possible, en utilisant uniquement des opérations élémentaires. Vérifier les résultats obtenus « manuellement » à la fin de l'exercice 2 des TDs et tracer les performances du système en fonction de K.

Le critère d'arrêt le plus élémentaire pour la méthode des puissances consiste à fixer le nombre d'itérations de la méthode à une valeur constante n_{it}. A la dernière itération, $\vec{\pi}^{(n_{it})}$ est censé fournir une estimation du vecteur des probabilités stationnaires $\vec{\pi}$.

2 - Programmer la méthode des puissances et la tester pour $K = 6$, $p = 0.02$ et $q = 0.01$, avec un nombre d'itérations n_{it} variable. Comparer les résultats obtenus avec la méthode exacte. Que peut-on conclure sur cet exemple ?

3 - Tester la méthode des puissances avec d'autres valeurs numériques pour K, p et q. Présenter les résultats sous une forme synthétique. Qu'en conclure sur l'efficacité du critère de convergence élémentaire ?

Un critère d'arrêt plus adapté consiste à stopper les itérations de la méthode des puissances lorsque le vecteur calculé à l'itération courante, $\vec{\pi}^{(n)}$, est suffisamment proche du vecteur calculé à l'itération précédente, $\vec{\pi}^{(n-1)}$. La distance entre $\vec{\pi}^{(n)}$ et $\vec{\pi}^{(n-1)}$ sera comparée à une valeur ε que l'on fixera au départ à 10^{-5}. Lorsque celle-ci devient inférieure à ε, le vecteur $\vec{\pi}^{(n)}$ obtenu à la dernière itération fournit alors une estimation du vecteur des probabilités stationnaires $\vec{\pi}$.

4 - Proposer différents critères d'arrêt basés sur ce principe. Les tester sur l'exemple numérique initial ($K = 6$, $p = 0.02$ et $q = 0.01$). Choisir un critère (éventuellement combiné) en justifiant le choix.

5 - Faire varier la valeur de ε et tester sur différents exemples la précision et la vitesse de convergence de la méthode des puissances. Représenter les résultats de façon synthétique, par exemple sous forme de courbes. Conclure sur le « meilleur » critère à adopter.

On utilisera les conclusions de cette dernière question pour choisir un critère d'arrêt qui sera utilisé dans toute la suite du TME.

Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel reprend l'idée de la méthode des puissances tout en essayant de réutiliser au plus tôt les valeurs les plus récemment calculées.

En décomposant P de la façon suivante :

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0K} \\ 0 & 0 & p_{12} & \cdots & p_{1K} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_{20} & p_{21} & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{K0} & p_{K1} & p_{K2} & \cdots & p_{KK-1} & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} p_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{KK} \end{pmatrix}}_{D}$$

l'équation $\vec{\pi} = \vec{\pi}P$ peut être réécrite de façon équivalente (car D, donc I –D est inversible) :

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}U + \vec{\pi}L + \vec{\pi}D$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\pi} = \left(\vec{\pi}U + \vec{\pi}L\right)(I - D)^{-1}$$

La méthode de Gauss-Seidel consiste alors à résoudre de façon itérative l'équation :

$$\vec{\pi}^{(n)} = \left(\vec{\pi}^{(n)}U + \vec{\pi}^{(n-1)}L\right)(I - D)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_j^{(n)} = \frac{1}{1 - p_{jj}}\left[\sum_{i<j} \pi_i^{(n)} p_{ij} + \sum_{i>j} \pi_i^{(n-1)} p_{ij}\right] \quad \text{pour tout } j \in E$$

Attention : A chaque itération les $\vec{\pi}^{(n)}$ doivent être renormalisés.

Exercice 2 : **Comparaison des méthodes numériques**

1 - Expliquer intuitivement pourquoi l'on s'attend à ce que la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement que la méthode des puissances.

2 - Programmer la méthode de Gauss-Seidel et la tester avec les valeurs numériques initiales (K = 6, p = 0.02 et q = 0.01). Comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par la méthode des puissances, ainsi que le nombre d'itérations des deux méthodes (lorsque le même critère de convergence est utilisé).

3 - Faire varier le nombre d'états de la chaîne (en gardant les valeurs précédentes pour p et q) et tracer le nombre d'itérations des deux méthodes pour atteindre la convergence. Que constate-t-on sur cet exemple ?

4 - Tester les deux méthodes sur différents exemples en faisant varier les paramètres de la chaîne. Par exemple, tester des valeurs petites et grandes pour p et q, proches et éloignées, inverser leurs valeurs, garder un rapport constant, etc. Représenter les résultats sous forme synthétique.

5 - Quelles conclusions peut-on tirer de tous ces exemples ? La méthode de Gauss-Seidel est-elle toujours plus performante que la méthode des puissances ?

La plupart des méthodes numériques (dont celle des puissances et de Gauss-Seidel) ne fonctionnent que sur des chaînes finies. Si la CMTD est infinie, il faut donc la tronquer avant de pouvoir la résoudre par une telle méthode. Tronquer une chaîne de Markov n'est pas sans conséquence et doit donc être réalisé avec précaution.

Exercice 3 : **Chaînes infinies**

On considère la CMTD infinie de l'exercice 3 des TD (avec des arrivées Bernoulliennes).

1 - Donner le graphe ainsi que la matrice de transitions associés à la CMTD lorsque celle-ci est « tronquée » à une valeur K (c'est-à-dire lorsque le buffer du drapeau a une capacité limitée à K clients).

2 - Appliquer la méthode des puissances et la méthode de Gauss-Seidel à cette chaîne tronquée pour les valeurs numériques suivantes : $K = 6$, $p = \frac{2}{5}$ et $r = \frac{1}{6}$. Comparer les résultats numériques aux valeurs exactes obtenus sur la chaîne infinie. Donner le nombre d'itérations des deux méthodes et expliquer le résultat obtenu pour la méthode de Gauss-Seidel.

3 - Résoudre la CMTD tronquée pour différentes valeurs de K, p et r. Comparer les méthodes numériques (puissance et Gauss-Seidel) obtenues sur la chaîne tronquée, aux résultats exacts obtenus sur la chaîne infinie. Conclure sur l'effet de la troncature.

4 - Utiliser les méthodes numériques pour résoudre la CMTD lorsque les arrivées de clients sont poissoniennes. On testera, par exemple, le cas : $K = 6, \lambda = 1, T = 1, r = \frac{1}{6}$.