Épreuve écrite – première session

Durée : 2H

Seuls documents autorisés : Cours et notes de cours
– Barême indicatif –

Exercice 1 () – Jeu de cartes

On considère le jeu de cartes suivant :

1. Le jeu contient 52 cartes, 13 valeurs différentes (2, 3, ..., 10, valet, dame, roi,as) et 4 couleurs pour chaque valeur (cœur, pique, carreau, trèfle),
2. il y a n joueurs autour d'une table,
3. les joueurs tirent tour à tour une carte (on suppose que ce tirage est aléatoire, selon une distribution uniforme). Une fois qu'un joueur a tiré une carte, il la garde jusqu'à la fin du jeu,
4. lorsque tous les joueurs ont tiré une carte, ils la montrent aux autres joueurs,
5. si *au moins deux joueurs* ont une carte de même valeur, alors il n'y a pas de gagnant,
6. sinon, le gagnant est le joueur qui a la carte de plus grande valeur (selon l'ordre 2,3,...10, valet, dame, roi, as, de la plus petite valeur à la plus grande).

Q 1.1 À partir de combien de joueurs ne peut-il pas y avoir de gagnant ?

Q 1.2 Un événement élémentaire est représenté par un n-uplet $(c_1, ..., c_n)$, où c_i est la carte tirée par le i-ième joueur. Combien y-at'il d'événements élémentaires possibles ?

Q 1.3 Calculez p_n, la probabilité qu'il y ait un gagnant lorsqu'il y a n joueurs, en fonction de n.

Q 1.4 Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne (le "premier joueur" est celui qui tire une carte en premier) ?

Q 1.5 On appelle E_n l'événement "le premier joueur gagne (parmi n joueurs)" et F l'événement "le premier joueur a tiré un roi". Quelle est la probabilité de E_n sachant F ?

Q 1.6 Quelle est la probabilité que le premier joueur ait tiré un roi sachant qu'il a gagné (autrement dit, quelle est la probabilité de F sachant E_n) ?

Exercice 2 () – Maximum de variables uniformes

Soit n, un entier strictement positif ? On note U_1, ...U_p, p variables indépendantes qui suivent toutes une loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Ainsi, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, et tout $i \in \{1, ..., p\}$, on a $P(U_i = k) = \frac{1}{n}$.

Q 2.1 On note X_2 la variable aléatoire $X_2 = \max(U_1, U_2)$. Ainsi, l'événement $X_2 = k$ correspond à l'union des deux événements "$U_1 = k$ et $U_2 \leq k$" et "$U_1 \leq k$ et $U_2 = k$". Que vaut $P(X_2 > k)$?

Q 2.2 Plus généralement, on note $X_p = \max(U_1, ..., U_p)$. Que vaut $P(X_p > k)$?

Q 2.3 Pour quelles valeurs de p a-t'on $P(X_p > 0.95n) \geq 0.95$?

Q 2.4 Un fabriquant de téléphones associe un numéro de série à chaque téléphone fabriqué. On suppose que le i-ième téléphone fabriqué possède le numéro de série i. Un concurrent souhaite savoir combien de téléphones ont été fabriqués. Pour cela, il échantillonne (avec remise, selon une distribution uniforme), p téléphones et note leur numéro de série (où p a été trouvé à la question précédente). Peut-il avoir un intervalle de confiance sur le nombre total de téléphones fabriqués par son concurrent ?

Exercice 3 (4 points) – **Loi binomiale et souris**

La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ décrit le comportement d'une expérience où l'on répéte n fois une même épreuve comportant 2 issues : 0 (échec) et 1 (succès) ; et dont la probabilité de succès est p. Soit X une variable suivant une telle loi $\mathcal{B}(n,p)$, X peut alors prendre une valeur parmi $\{0,\cdots,n\}$ (il y a de 0 à n `Succès` possibles pour n épreuves) et :

$$\forall k \in \{0,\cdots,n\}, p(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Q 3.1 (1 point) *Espérance et variance d'une loi binomiale*
En remarquant qu'une variable X suivant une loi binomiale peut s'écrire comme la somme de variables X_i indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli, calculer l'espérance et la moyenne de X.

Q 3.2 (3 points) *Loi binomiale et souris*
Dans un laboratoire, on reçoit par lot de 4 des souris, blanches ou grises. On observe sur un envoi de 200 lots que :
- 13 lots n'ont pas de souris blanche,
- 65 lots contiennent une unique souris blanche,
- 72 lots contiennent exactement 2 souris blanches,
- 35 lots contiennent exactement 3 souris blanches,
- 15 lots contiennent exactement 4 souris blanches,

Les biologistes du laboratoire se demandent si cette répartition est compatible avec la théorie génétique selon laquelle il y a autant de souris blanches que de souris grises ?

Q 3.2.1 Exprimer H_0. Soit X la variable représentant le nombre de souris blanches dans un lot, quelle loi doit-elle suivre sous H_0 ?

Q 3.2.2 Quels seraient alors les effectifs attendus pour les lots comprenant de 0 à 4 souris blanches ?

Q 3.2.3 Vérifier si H_0 est acceptable pour un seuil de signification $\alpha = 0.05$.

Table du χ^2 : $c_{r,\alpha}$ tel que $P(Z \geq c_{r,\alpha}) = \alpha$ où $Z \sim \chi^2_{(r)}$.

$n \setminus \alpha$	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2