Statistique et Informatique (LI323)

Cours 4

Nicolas Baskiotis
nicolas.baskiotis@lip6.fr

Université Pierre et Marie Curie (UPMC)
Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6)

Jusqu'ici

On a vu comment :

- compter et dénombrer
- définir, manipuler et calculer une probabilité,
- définir une variable aléatoire.

Comment ?

- manipuler une variable aléatoire
- faire le lien entre l'empirique et la théorie.

Plan

Plan du cours :

- Caractéristiques d'une variable aléatoire
- lois usuelles
- loi des grands nombres.

Caractéristiques d'une v.a.

Définitions

Soit une v.a. X,

- le *quantile* d'ordre α est la valeur x_α telle que $P(X < x_\alpha) = \alpha$.
- la médiane est le quantile d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$
- le *mode* (ou valeur dominante, valeur la plus probable) est la valeur de X associé à la plus grande probabilité.

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Définition

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable, et P une distribution de probabilité sur Ω.
Soit X une $v.a.$ sur l'espace probabilisé (Ω, P), à valeurs dans $\{x_1, x_2, ...\} \subset \mathbb{R}$.
on appelle *espérance* de X, notée $\mathbb{E}(X)$ la quantité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P\big(\{\omega\}\big)$$

Remarques

- intuition (cf. loi des grands nombres, fin du cours) :
  l'espérance est la limite (quand $n \to \infty$) de la moyenne sur un échantillon de taille n.
- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\mathbb{E}(X) = p$.

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y)) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a$,
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$,
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
  Plus généralement, si $X_1, ..., X_n$ sont n v.a. réelles:

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Exemples

- Combien de cartes restent à une place inchangée après un mélange aléatoire du paquet ?
- Algorithmes de tri :
  on suppose que les éléments dans le tableau à trier sont placés aléatoirement :
  - l'espérance du nombre de comparaisons du *tri rapide* est en $O(n \ln n)$,
  - l'espérance du nombre de comparaisons du *tri par insertion* est en $O(n^2)$.
- Roulette : 37 numéros (0 à 36) :
  - pari sur les nombres impairs :
    on donne au joueur 2 fois sa mise s'il gagne ;
  - pari sur un nombre particulier :
    on donne au joueur 36 fois sa mise s'il gagne ;
  - vaut-il mieux jouer sur les nombres impairs ou sur un nombre particulier ?

Variance et écart-type d'une $v.a.$ à valeurs réelles

Définition

Soit X une $v.a.$ d'espérance m à valeurs dans $\{x_1, x_2, ...\}$, On appelle variance de X, la quantité:

$$V(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - m)^2 P(X = x_i)$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est appelé *l'écart-type* de X.

Propriétés

- $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, V(a) = 0$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, V(X + a) = V(X)$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, V(aX + b) = a^2 V(X)$
- Si $X_1, ..., X_n$ sont n v.a.r. indépendantes : $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

Variance d'une v.a. à valeurs réelles

Exemples

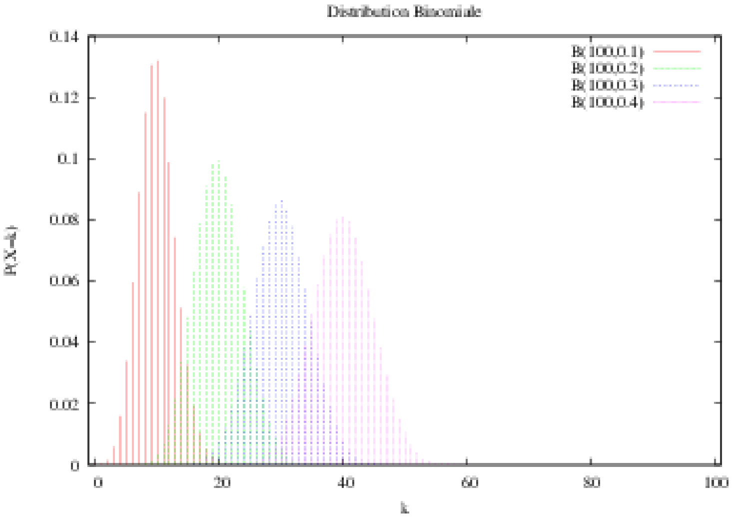
- Roulette : 37 numéros (0 à 36) :
  - pari sur les nombres impairs :
    on donne au joueur 2 fois sa mise s'il gagne ;
  - pari sur un nombre particulier :
    on donne au joueur 36 fois sa mise s'il gagne.

  - L'espérance des gains est la même ;
  - quelle est la variance du gain dans chacun des cas ?

- Complexité des algorithmes :
  à complexité moyenne équivalente, on préfèrera souvent l'algorithme de plus faible variance.

Variance de la loi binomiale

Si X suit une loi binomiale, $V(X) = np(1-p)$.



Lois de probabilités discrètes : loi de Poisson

Loi de Poisson

Une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre λ si elle vérifie :

$$\forall k \geq 0, P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Propriétés

$\mathbb{E}(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$.
La loi de poisson est la seule loi discrète vérifiant $\mathbb{E}(X) = V(X)$.

Domaine d'application

La loi de poisson est la loi des petites probabilités ou loi des événements rares. On l'utilise, par exemple, pour modéliser le nombre de connection à un serveur Web par seconde.

Loi de Poisson (2)

Propriétés

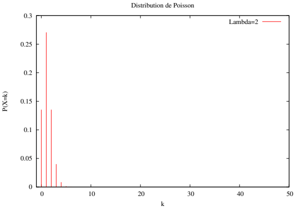
Soit $(Y_n)_{n>0}$ une suite de v.a.r. sur (Ω, P) telles que Y_n suit la loi binomiale de paramètres n et λ/n.
Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

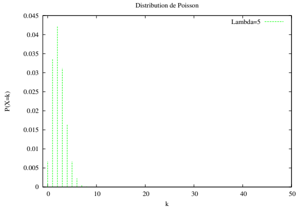
- pour tout entier k, on a:

$$\lim_{n \to \infty} P(Y_n = k) = P(X = k).$$

- On peut donc approximer une loi binomiale de paramètre n et p par une loi de Poisson de paramètre np lorsque n est grand par rapport à p.
  En pratique, on peut utiliser la règle $n \geq 100$ et $np \leq 10$.

Loi de Poisson





Exemple

Le tableau ci-dessous repertorie le nombre d'accidents du personnel d'une usine sur une période de 200 jours

# accidents	0	1	2	3	4	5
# de jours	86	82	22	7	2	1

Les accidents sont survenus indépendamment les uns des autres, on peut approcher le nombre d'accident par jours avec une v.a. qui suit une loi de poisson de paramètre λ, où λ est le nombre moyen d'accidents par jour.
Ainsi, l'estimation du nombre de jours où il s'est produit moins de 3 accidents est:

$$200 * P(X < 3) \approx 190$$

Lois discrètes usuelles : résumé

Nom	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$Var(X)$
Bernoulli	$\mathbb{P}(X = k) = p^k(1-p)^{(1-k)}$	p	$p(1-p)$
binomiale	$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{(n-k)}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathbb{P}(X = n) = exp(-\lambda)\lambda^n/n!$	λ	λ
géométrique	$\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$

Loi des grands nombres : préliminaires

Inégalité de Markov

Soit X une $v.a.r.$ non négative, et a un réel strictement positif, on a alors

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Démonstration

on suppose que X est à valeurs dans $\{x_1, x_2, ...\}$, $0 \leq x_i < x_{i+1}$.
On note j, le plus petit indice tel que $x_j \geq a$.

$$aP(X \geq a) = a\sum_{i=j}^{\infty} P(X = x_i) \leq \sum_{i=j}^{\infty} x_i P(X = x_i) \leq \mathbb{E}(X)$$

Loi des grands nombres : préliminaires

Inégalité de Tchebychev

Soit X une $v.a.r$ d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $V(X)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On a:

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$$

Démonstration

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, l'événement $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda\}$ est égal à $\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \lambda^2\}$.
D'après l'inégalité de Markov :

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) = P((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \lambda^2) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}.$$

Loi des grands nombres : préliminaires

Inégalité de Tchebychev : corollaire

- Inégalité : $P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$,
- Cas particulier : si $V(X)$ est petit, alors X est proche de son espérance avec une grande probabilité.

Cas particulier

Soient $X_1, ..., X_n$, n v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance m et de variance v.
Soit $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors :

- $\mathbb{E}(Z_n) = m$,
- $\mathbb{V}(Z_n) = \frac{v}{n}$

La variance tend vers 0 avec $n \Rightarrow$ la moyenne est proche de l'espérance.

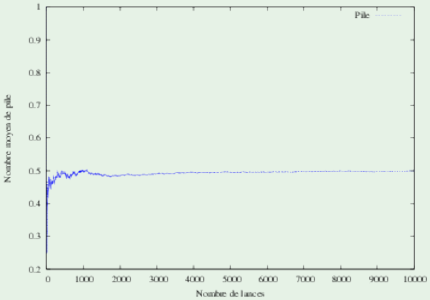
Loi des grands nombres

Énoncé

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de $v.a.r.$ indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance E et de variance v finies. Alors:

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - E\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

Exemple: Pile ou Face avec une pièce non-truquée



Loi des grands nombres

Applications

- Estimation des paramètres d'une loi binomiale ou d'une loi de poisson en calculant la moyenne des valeurs sur un échantillon.
- Estimation de probabilités par comptage :
  soit (Ω, P) un espace probabilisé, où P est *inconnue*.
  Soit E un événement. On peut estimer $P(E)$ en estimant l'espérance de la v.a. de bernoulli Y :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in E$$