# Statistique et Informatique (LI323)

## Cours 2

Nicolas Baskiotis

# Plan

- Quelques rappels du cours 1,
- événements indépendants,
- probabilités conditionnelles,
- loi des probabilités totales.

# Rappels du cours 1

## Événements et mesures de probabilité sur un ensemble discret

Soit $\Omega$ un ensemble dénombrable, appelé *univers*.

- Un sous-ensemble de $\Omega$ est appelé un événement,
- en notant $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des sous-ensembles de $\Omega$, une mesure de probabilité sur $\Omega$ est une fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifiant:
  1. $P(\Omega) = 1$,
  2. pour tout événement $E$, $P(E) \geq 0$,
  3. Pour toute suite $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements *incompatibles* : $P(\bigcup_i E_i) = \sum_i P(E_i)$.

## Dénombrements

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$.

- Nb de $k$-uplets d'éléments distincts de $E$ :

$$A_n^k = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

- nb de sous-ensembles distincts de cardinal $k$ de $E$ :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

# Dénombrements : exemple

**Exemple : tiroir à chaussettes**

Un tiroir contient 20 chaussettes de 10 paires différentes. On en tire 4 au hasard. Quelle est la probabilité de :

- obtenir 2 paires;
- d'obtenir au moins 1 paire.

# Indépendance

**Définition**

Deux événements $E$ et $F$ sont **indépendants** si:

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$$

**Exemples : lancer de deux dés**

- les deux chiffres obtenus après un lancer sont indépendants l'un de l'autre,
- les événements “le premier dé affiche 6” et “la somme des deux dés vaut 4” ne sont pas indépendants.

# Indépendance mutuelle

## Définition

Les événements $E_1, ..., E_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\mathbb{I}$ de l'ensemble $\{1, .., n\}$:

$$P(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} E) = \prod_{i\in\mathbb{I}} P(E_i)$$

## Événements non mutuellement indépendants : lancer d'un dé

- $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $P(E_1) = \frac{1}{2}$,
- $E_2 = \{3, 4, 5\}$, $P(E_2) = \frac{1}{2}$,
- $E_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(E_3) = \frac{4}{6}$,

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{3\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{6},$$

mais $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \neq P(E_1) \times P(E_3)$.

# Indépendance mutuelle

## Définition

Les événements $E_1, ..., E_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\mathbb{I}$ de l'ensemble $\{1, .., n\}$:

$$P(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} E) = \prod_{i \in \mathbb{I}} P(E_i)$$

## Événements non mutuellement indépendants : lancer de deux pièces

On note :

- A l'évènement “la première pièce donne pile”
- B l'évènement “la deuxième pièce donne face”
- C l'évènement “les deux pièces donnent le même résultat”

Indépendance mutuelle ou non ?

# Indépendance mutuelle (2)

## Un exemple important : le produit d'espaces probabilisés

Soient $\Omega_1, ..., \Omega_n$, $n$ ensembles discrets, et soit $P_i$ une mesure de probabilité sur $\Omega_i$. Alors, la mesure de probabilité $Q$ définie sur $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ par:

$$Q\left(\{(\omega_1, ..., \omega_n)\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P_i\left(\{\omega_i\}\right).$$

$Q$ est appelée le produit des mesures $P_1, ..., P_n$.
Alors, soient $A_1 \subset \Omega_1$, ..., $A_n \subset \Omega_n$, qui définissent les événements suivants:

$$E_i = \left(\prod_{j<i} \Omega_j\right) \times A_i \times \left(\prod_{j>i} \Omega_j\right).$$

Les événements $E_i$ sont mutuellement indépendants.

## Exemple : lancer de $n$ dés

On lance $n$ fois le même dé ($\Omega_i = \{1, ..., 6\}$). Alors, les événements $E_i$ définis par “le résultat du i-ème lancer est $1$” sont mutuellement indépendants.

# Probabilités Conditionnelles

Considérons deux événements $E$ et $F$, Supposons qu'on ne s'intéresse à la réalisation de $E$, étant donnée la réalisation de $F$. Cela revient à estimer la réalisation de $E \cap F$ par rapport à $F$

## Définition

Soit $\Omega$ un ensemble dénombrable et $P$ une mesure de probabilisé sur $\Omega$. Soit $F$ un événement *de probabilité non nulle*. On appelle probabilité conditionnelle sachant $F$ l'application:

$$P(. \mid F) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

définie par

$$\forall E \in \mathcal{P}(\Omega), P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Cette application est une mesure de probabilité sur $\Omega$.
Note : $P(E \mid F)$ se lit "probabilité de $E$ sachant $F$".

# Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

## Roulette russe

Deux balles sont insérées côte à côte dans un pistolet dont le barillet peut contenir 6 balles. Le barillet est positionné ensuite au hasard.

- Quel est le risque que le premier coup soit fatal ?
- Le premier coup n'était pas fatal. Est-il plus risqué de tirer directement ou de positionner le barillet au hasard puis de tirer ?

# Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

## Paradoxe des deux enfants (M. Gardner, 1959)

1. Mr. Jones has two children. The older child is a girl. What is the probability that both children are girls?

   *M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?*

2. Mr. Smith has two children. At least one of them is a boy. What is the probability that both children are boys?

   *M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?*

# Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

## Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  *Quelle est la mesure de probabilité considérée ?*
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon"):
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F,G), (G,F), (F,G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ( $P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P((A_2 \cap A_1) \cap A_1)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

# Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

## Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  *Quelle est la mesure de probabilité considérée ?*
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon"):
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F, G), (G, F), (F, G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ( $P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P\big((A_2 \cap A_1) \cap A_1\big)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

# Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

## Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  *Quelle est la mesure de probabilité considérée ?*
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon"):
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F, G), (G, F), (F, G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ( $P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P((A_2 \cap A_1) \cap A_1)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

# Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

## Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  *Quelle est la mesure de probabilité considérée ?*
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon"):
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F,G), (G,F), (F,G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ( $P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P\big((A_2 \cap A_1) \cap A_1\big)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

# Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

## Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G,G)\}$, $B = \{(G,G),(G,F),(F,G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

# Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

## Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G,G)\}$, $B = \{(G,G),(G,F),(F,G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P\big(A \cap B\big)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

# Probabilités Conditionnelles (2)

## Application en chaîne de la formule des probabilités conditionnelles

- Par définition, si $P(F) \neq 0$, on a $P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$
- Plus généralement, si $E_1, ..., E_n$ sont $n$ événements, on a :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \prod_{i=2}^{n} P(E_i \mid E_1 \cap ... \cap E_{i-1})$$

## Exemple

Quelle est la probabilité de tirer trois boules de la même couleur dans une urne contenant $7$ boules rouges et $5$ boules bleues, en tirant les trois boules l'une après l'autre et sans remise?
Posons

- $R_i$=`La` $i^{eme}$ `boule tirée est rouge`, $i \in \{1, 2, 3\}$
- $B_i$=`La` $i^{eme}$ `boule tirée est bleue`, $i \in \{1, 2, 3\}$

On a alors $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(R_3|R_2 \cap R_1) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10}$.
De même, $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10}$

# Probabilités conditionnelles (3)

## Exemple

On tire successivement et sans remise 4 lettres du mot “ATTACHANT” Quelle est la probabilité d’obtenir “CHAT” ?

## Rat de laboratoire

Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l’un d’eux se trouve de la nourriture qu’il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu’à ce que le rat trouve le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes, avec quelle probabilité la première tentative réussie est-elle la $k$-ème ?

- le rat n’a aucun souvenir des expériences précédentes,
- le rat se souvient uniquement de l’expérience précédente,
- le rat se souvient des deux expériences précédentes.

# Formule de Bayes, théorème des probabilités totales

## Formule de Bayes

Soient $E$ et $F$ deux événements de probabilité non nulle. Alors :

$$P(E \cap F) = P(F \mid E) \times P(E) = P(E \mid F) \times P(F), \text{ soit}$$

$$P(E \mid F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}.$$

## Théorème des probabilités totales

Soit $(F_i)_i$ une partition de $\Omega$ (aussi appelé ensemble complet d'événements) :

- si $i \neq j$ alors $F_i \cap F_j = \emptyset$ ($F_i$ et $F_j$ sont incompatibles),
- $\bigcup_i F_i = \Omega$.

Alors $\forall E \subset \Omega, P(E) = \sum_i P(E \cap F_i) = \sum_i P(E|F_i)P(F_i)$.

De plus, pour tout $i$, $P(F_i|E) = \dfrac{P(E \mid F_i) \times P(F_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(E \mid F_j) \times P(F_j)}$.

# Formule de Bayes : exemple

## Exemple

On enlève aléatoirement une carte d'un jeu de $52$ cartes, et on ignore laquelle. On tire ensuite au hasard une carte dans ce jeu incomplet et c'est un coeur. Quelle est la probabilité pour que la carte manquante soit un coeur? On considère les événements suivants:

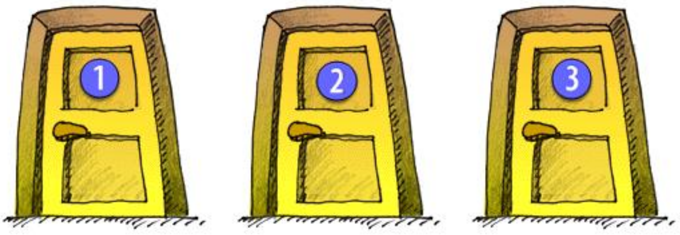
- $CP$: La carte perdue est un coeur, $TC$: Tirer un coeur du jeu incomplet

Nous avons alors $P(CP) = \frac{1}{4}$ et $P(TC \mid CP) = \frac{12}{51}$
$TC$ peut s'écrire comme: $TC = (TC \cap CP) \cup (TC \cap \bar{CP})$ et

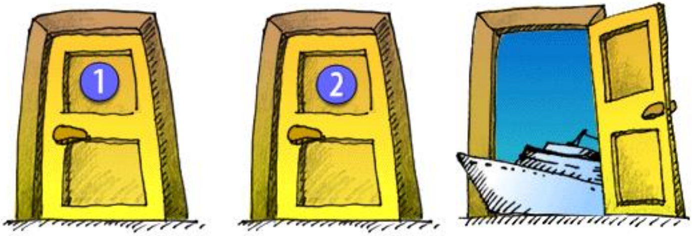
$$P(CP \mid TC) = \frac{P(TC \mid CP) \times P(CP)}{P(TC \mid CP) \times P(CP) + P(TC \mid \bar{CP}) \times P(\bar{CP})} = \frac{\frac{12}{51} \times \frac{1}{4}}{\frac{12}{51} \times \frac{1}{4} + \frac{13}{51} \times \frac{3}{4}} = \frac{12}{51}$$

# Monty Hall - (Merci à Christophe Gonzales)

http://www.apprendre-en-ligne.net/random/monty/

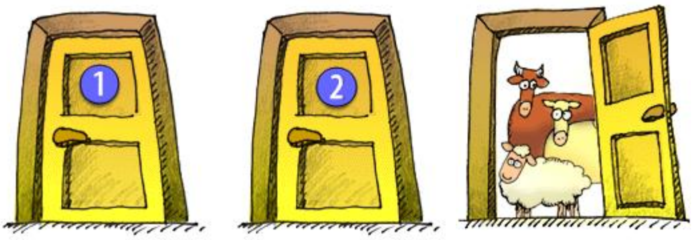


# Exemple de Monty Hall




- derrière une des portes, il y a un voyage à gagner

# Exemple de Monty Hall




- derrière une des portes, il y a un voyage à gagner
- derrière les autres portes, il y a des ... moutons

# Exemple de Monty Hall


- derrière une des portes, il y a un voyage à gagner
- derrière les autres portes, il y a des ... moutons

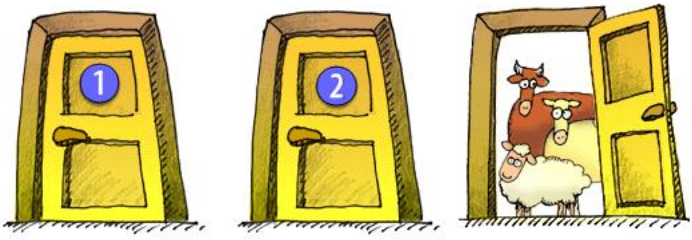
Quelle est la probabilité que le bateau se trouve derrière une des portes ?

# Exemple de Monty Hall


L’animateur demande de choisir une des trois portes pour gagner le voyage....

*le joueur choisit la porte 2*

# Exemple de Monty Hall

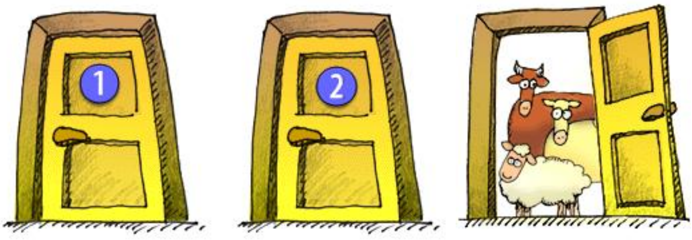



L'animateur demande de choisir une des trois portes pour gagner le voyage....

*le joueur choisit la porte 2*

Il ouvre ensuite une des deux autres portes derrière laquelle il y a des moutons.

# Exemple de Monty Hall



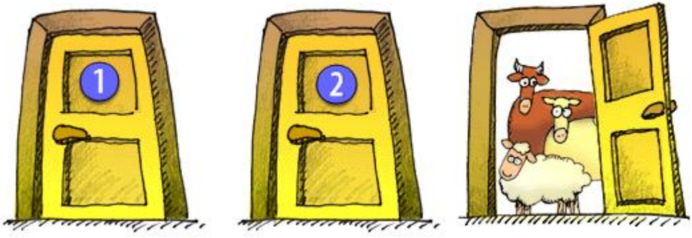

L'animateur demande de choisir une des trois portes pour gagner le voyage....

*le joueur choisit la porte 2*

Il ouvre ensuite une des deux autres portes derrière laquelle il y a des moutons.

Question: Conserver la porte 2 ou choisir la porte 1 ?

# Exemple de Monty Hall




L'animateur demande de choisir une des trois portes pour gagner le voyage....

*le joueur choisit la porte 2*

Il ouvre ensuite une des deux autres portes derrière laquelle il y a des moutons.

Question: Conserver la porte 2 ou choisir la porte 1 ?

Pour cela, on va calculer la proba que le bateau soit derrière les portes 1 et 2.

# Exemple de Monty Hall

## Les événements élémentaires

- $B_1$ : le bateau est derrière la porte $1$
- $B_2$ : le bateau est derrière la porte $2$
- $B_3$ : le bateau est derrière la porte $3$
- $E$ : l'animateur a choisi, parmi les portes $1$ et $3$, d'ouvrir la porte $3$

## Calcul des probabilités

- $\forall i \in \{1, 2, 3\}, P(B_i) = \frac{1}{3}$
- $P(E|B_1) = 1, P(E \mid B_2) = \frac{1}{2}, P(E \mid B_3) = 0$
- $P(E) = P(E|B_1) \times P(B_1) + P(E|B_2) \times P(B_2) + P(E|B_3) \times P(B_3)$ $= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
- $P(B_1 \mid E) = \frac{P(E|B_1) \times P(B_1)}{P(E)} = \frac{2}{3}$, $P(B_2 \mid E) = \frac{P(E|B_2) \times P(B_2)}{P(E)} = \frac{1}{3}$