TD5

TIR À L'ARC SUR UNE CIBLE DE RAYON R

Considérons deux archers visant une cible de rayon R. On suppose que les archers sont assez adroits pour ne jamais rater la cible. La performance de chaque archer est mesurée par la distance au centre de la cible : si un archer envoie un flèche à une distance t du centre, il gagne t points. L'objectif est de posséder le moins de points possibles. On note X_1 (respectivement X_2), la variable aléatoire comptant le nombre de points du premier (resp. deuxième) archer. Le niveau de chaque archer est connu :
Pour $t \in [0, R]$, $P(X_1 \leq t) \propto t$, et $P(X_2 \leq t) \propto \sqrt{t}$.

Quest 1.1 Calculez et tracez les fonctions de répartitions de X_1 et X_2.

Quest 1.2 Soit $t \in [0, R]$. Que vaut $P(X_1 = t)$?

Quest 1.3 Déterminez les densités et les espérances de X_1 et X_2.

Quest 1.4 Qui est le meilleur archer ?

LOI EXPONENTIELLE

Une variable aléatoire à valeurs réelles X suit une loi exponentielle de paramètre λ si elle admet comme fonction de densité:

$$p_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- Calculez la fonction de répartition de X ;
- Soient $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Montrez que $Y = \min(X_1, ..., X_n)$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + ... + \lambda_n$.

Loi normale

On admet que la longueur du pied d?un homme adulte suit une loi normale de moyenne $24cm$ et d'écart-type $3cm$. Un fabriquant de chaussettes étudie cette loi pour programmer sa production de chaussettes en taille et en quantité. Il décide de répartir sa production selon 5 tailles numérotées de 1 à 5 de la façon suivante : il prend un intervalle symétrique autour de la moyenne, de probabilité $p = 0.9$; il divise cet intervalle en 3 intervalles égaux correspondant aux tailles 2, 3 et 4 . Il obtient donc ainsi son total de 5 tailles.

- Déterminer les longueurs de pied qui délimitent ces 5 intervalles.
- Quelle est la part, en pourcentage, de la production totale à affecter respectivement à chacune des 5 tailles ?

(Données: $\Phi(4.95/3) = 0.95$ et $\Phi(4.95/9) = 0.71$ où Φ est la fonction de répartition de la variable centré réduite.)

Intervalle de confiance

Un développeur vient de terminer un filtre spam. Pour évaluer la performance de son programme, il sélectionne n = 1000 e-mails au hasard, tirés indépendamment et selon la même distribution que les e-mails de ses futurs utilisateurs. Le développeur étiquette lui-même les 1000 e-mails (chaque mail est donc étiqueté selon que c'est du spam ou non), puis applique son filtre sur les 1000 e-mails. Parmi ces e-mails, il mesure que son filtre fait 50 erreurs.

- Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d?erreurs du filtre sur un échantillon de 1000 e-mails. Quelle est la loi de X ?
- On admet que, dans notre cas, la probabilité p que le filtre fasse une erreur sur un e-mail choisi aléatoirement est suffisante pour que le théorème de la limite centrale s?applique. Quelle est l'approximation de $P(X \leq t)$ donnée par le théorème de la limite centrale dans notre cas ?
- On admet que $\sqrt{p(1-p)}$ peut être approximé par $\sqrt{\hat{p}_n(1-p_n)}$ avec $\hat{p}_n = X/n$ (rappel : $n = 1000$ est le nombre d'e-mails). Donnez un intervalle de confiance à 90% pour p.