M1 IAD UE RFIDEC
Corrigé du TD N°4

17 octobre 2006

Exercice 1

i) La formule n'a de sens que si $P(C) > 0$; par définition,

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \text{ et } P(B/A \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap C)} \text{ ; d'où :}$$

$$P(A/C)P(B/A \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P([A \cap B] \cap C)}{P(C)} = P(A \cap B/C).$$

ii) La formule n'a de sens que si $P(A \cap B) > 0$ (qui entraine $P(A) > 0$) ; par définition,

$$P(A \cap B \cap C) = P([A \cap B] \cap C) = P(A \cap B)P(C/A \cap B) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B).$$

Exercice 2

a) Assimilant fréquences et probabilités on obtient :
i) $P(A) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$, $P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{80/300}{240/300} = \frac{1}{3}$ et $P(A/\bar{F}) = \frac{P(A \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{20/300}{60/300} = \frac{1}{3}$;
A et F sont donc indépendants.

ii) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{90/300}{270/300} = \frac{1}{3}$ et $P(A/\bar{C}) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{10/300}{30/300} = \frac{1}{3}$;
A et C sont donc indépendants.

iii) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A/F \cap C) = \frac{P(A \cap F \cap C)}{P(F \cap C)} = \frac{78/300}{220/300} = \frac{78}{220} = 0.3545$,
$P(A/F \cap \bar{C}) = \frac{P(A \cap F \cap \bar{C})}{P(F \cap \bar{C})} = \frac{2/300}{20/300} = \frac{1}{10} = 0.1$,
$P(A/\bar{F} \cap C) = \frac{P(A \cap \bar{F} \cap C)}{P(\bar{F} \cap C)} = \frac{12/300}{50/300} = \frac{12}{50} = 0.24$
et $P(A/\bar{F} \cap \bar{C}) = \frac{P(A \cap \bar{F} \cap \bar{C})}{P(\bar{F} \cap \bar{C})} = \frac{8/300}{10/300} = \frac{8}{10} = 0.8$

$P(A) \neq P(A/F \cap C)$ montre que A et $F \cap C$ ne sont pas indépendants.
En fait, dans la grippe aviaire les deux symptômes ont plus tendance à aller de pair (tous deux présents ou tous deux absents) que dans la grippe classique.

b) La propriété

$$A \text{ indépendant de } B \text{ et de } C \Rightarrow A \text{ indépendant de } B \cap C$$

n'est pas vraie en général puisqu'elle n'est pas vérifiée ici (avec F dans le rôle de B).

c) En France, on a une autre loi Q avec $Q(A) = \frac{1}{100}$ et $Q(\bar{A}) = \frac{99}{100}$.
On doit admettre que les fréquences d'apparition des symptômes pour chaque maladie sont les mêmes dans les deux pays, d'où les probabilités conditionnelles :
$Q(F \cap C/A) = P(F \cap C/A) = \frac{78}{100}$; $Q(F \cap C/\bar{A}) = P(F \cap C/\bar{A}) = \frac{142}{200}$;

par la formule de BAYES,

$$Q(A/F\cap C)=\frac{Q(F\cap C/A)Q(A)}{Q(F\cap C/A)Q(A)+Q(F\cap C/\bar{A})Q(\bar{A})}=\frac{(78/100)\times(1/100)}{(78/100)\times(1/100)+(142/200)\times 99/100)}=\frac{78}{7107}=0.011$$

La forte fréquence relative de la grippe classique fait pencher le diagnostic de son côté, malgré la plus forte association de la présence simultanée des deux symptômes avec la grippe aviaire.

Exercice 3

$P(B_i)=\frac{1}{6}$ ($i=1,...,6$).

i)

$$P(A_7)=\sum_{i=1}^{6}P(A_7/B_i)P(B_i)$$
$$\forall i, P(A_7/B_i)=\frac{1}{6} \text{ et comme } P(B_i)=\frac{1}{6},\ P(A_7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

ii)

$$P(A_8)=\sum_{i=1}^{6}P(A_8/B_i)P(B_i)$$
$$\forall i\geq 2, P(A_8/B_i)=\frac{1}{6} \text{ et } P(A_8/B_1)=0\,;\text{ d'où, } P(A_8)=\frac{5}{36}$$

iii) D'une manière générale, pour $k\in\{9,10,11,12\}$, pour $i\geq k-6, P(A_k/B_i)=\frac{1}{6}$ et pour $i<k-6, P(A_k/B_i)=0$; d'où,

$$P(A_k)=\frac{6-(k-6)+1}{36}=\frac{13-k}{36}$$

La somme des faces supérieures de deux dés vaut k quand la somme de leurs faces inférieures vaut $14-k$; or ces positions sont symétriques et donc de mêmes probabilités ; donc $P(A_k)=P(A_{14-k})$.

Exercice 4

Notation des événements. M : "la personne est malade" ; $\bar{M}$:"la personne n'est pas malade" ; T : "le test est positif" ; $\bar{T}$: "le test est négatif".

a) Probabilité qu'une personne non encore soumise au test soit malade : $P(M)=0.01$;

b) Probabilité que le test soit négatif pour une personne saine : $P(\bar{T}/\bar{M})=0.9$;

c) Probabilité qu'une personne soit malade lorsque son test a été positif :

$$P(M/T)=\frac{P(T/M)P(M)}{P(T/M)P(M)+P(T/\bar{M})P(\bar{M})}=\frac{0.8\times0.01}{0.8\times0.01+0.1\times0.99}=0.0748$$

Probabilité qu'une personne soit malade lorsque son test a été négatif :

$$P(M/\bar{T})=\frac{P(\bar{T}/M)P(M)}{P(\bar{T}/M)P(M)+P(\bar{T}/\bar{M})P(\bar{M})}=\frac{0.2\times0.01}{0.2\times0.01+0.9\times0.99}=0.00224$$

d) Probabilité que le test soit positif pour une personne soumise au test :

$$P(T)=P(T/M)P(M)+P(T/\bar{M})P(\bar{M})=0.8\times0.01+0.1\times0.99=0.107$$

e) Pour calculer la probabilité qu'une personne soit malade lorsqu'on l'a soumise à deux tests successifs qui ont tous deux été positifs (événements T_1 et T_2), $P(M/T_1\cap T_2)$, nous avons besoin de connaître la probabilité $P(T_1\cap T_2/M)$.

Pour cela nous ferons les hypothèses d'indépendance conditionnelle

$$P(T_1\cap T_2/M)=P(T_1/M)P(T_2/M)$$

et

$$P(T_1\cap T_2/\bar{M})=P(T_1/\bar{M})P(T_2/\bar{M})$$

D'où

$$P(M/T_1\cap T_2)=\frac{P(T/M)^2P(M)}{P(T/M)^2P(M)+P(T/\bar{M})^2P(\bar{M})}=\frac{0.8^2\times0.01}{0.8^2\times0.01+0.1^2\times0.99}=0.3926$$